ডাচ-বাংলা ব্যাংক -প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২৩
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: প্রাইমারি (৩য়-৫ম শ্রেণি) — **সময়: স্ন স্প্ল শ্ন**

Category: Primary (Class 3-5) — **Time: 2 Hours**

[illegible]

[Problems are sorted according to its difficulty. Full marks are written inside the bracket at the end of each problem. All numbers except the Question number are written in English. Answers have to be written on the main answer script. Back side of the answer script can be used for doing roughs. Writing name and registration number on each extra page is mandatory.]

1. নিচের রাশিতে বন্ধনী যুক্ত করো যেন রাশিটি সত্যি হয়: **[7]**

$$8 - 3 \times 2 - 1 + 1 = 0$$

(উদাহরণস্বরূপ, $3 + 5 \times 2 + 3 = 40$ রাশিটিকে সত্য বানাতে হলে আমরা প্রদত্ত উপায়ে বন্ধনী যুক্ত করি: $(3 + 5) \times (2 + 3) = 40$)

Insert bracket(s) in the following expression to make it true:

$$8 - 3 \times 2 - 1 + 1 = 0$$

[For example, to make the expression $3 + 5 \times 2 + 3 = 40$ true, we add brackets like this: $(3 + 5) \times (2 + 3) = 40$.]

2. জ্যোতি তোমাকে একটি টাকা উৎপাদনকারী মেশিন দিলো। যদি তুমি এই মেশিনে কিছু টাকা জমা দাও তাহলে এই মেশিনও তোমাকে কিছু টাকা ফেরত দিবে। তুমি যদি এই মেশিনে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা জমা দাও এবং তার সাথে আরো **7** টাকা দাও তাহলে এই মেশিন ঐ নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা দ্বিগুণ করে ফেরত দিবে। তোমার কাছে যদি **2023** টাকা থাকে তাহলে এই মেশিন থেকে তুমি সর্বোচ্চ কতো টাকা ফেরত পেতে পারো? ((উল্লেখ্য মেশিন থেকে প্রাপ্ত কোন টাকা সে মেশিনে পুনর্বার ব্যবহার করতে পারবে না।) **[8]**

Juty gives you a money-making machine. If you give this machine some taka, it will return you some taka. If you give the machine a certain amount of taka and **7** taka more, it will return you the double of that certain amount of taka. What amount of taka can you get the most from this machine if you have **2023** taka? (Note that, she cannot input the money again in the machine that was outputted from the machine.)

3. সাব্বির তার জন্মদিনের অনুষ্ঠানে সিদ্ধার্থ, জয়দীপ আর সৌধকে দাওয়াত দিয়েছে। যদি তারা আসে তাহলে উপহার হিসেবে সিদ্ধার্থ একটি বই, জয়দীপ একটি ঘড়ি আর সৌধ একটি মগ আনবে। দুঃখজনকভাবে, যতই চেষ্টা করুক সিদ্ধার্থ আর সৌধ একসাথে অনুষ্ঠানে আসতে পারবে না। আবার এটা জানা আছে যে তাদের তিনজনের অন্তত একজন সাব্বিরের জন্মদিনের অনুষ্ঠানে আসবে। কতগুলো ভিন্ন উপায়ে সাব্বির উপহার পেতে পারে? উদাহরণস্বরুপ, একটা উপায় হল যে সে একটা বই আর একটা ঘড়ি পেতে পারে। **[10]**

Sabbir has invited Siddharth, Joydeep and Sowdha to his birthday party. If they come, Siddharth will bring a book, Joydeep will bring a watch and Sowdha will bring a mug as a gift. Unfortunately, no matter how much they try, Siddharth and Sowdha cannot come to the party together. It is also known that at least one of three of them will come to Sabbir's birthday party. In how many different ways Sabbir can get gifts? For example, one way is, he can get a book and a watch.

4. তাহ্নিক কাছে একটি অদ্ভুত ছক্কা রয়েছে। ছক্কার ছয়টি তলের প্রতিটিতে একটি করে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা লেখা রয়েছে যেন, যেকোন দুটি নিকটবর্তী তলের সংখ্যাদ্বয়ের মধ্যে পার্থক্য অন্তত **5** হয়। সংখ্যা **6** টি ভিন্ন ভিন্ন নাও হতে পারে। **6** টি সংখ্যার সম্ভাব্য ক্ষুদ্রতম সমষ্টি কত? **[10]**

Thanic has a strange six-sided dice. There is a positive integer placed on each of the six faces of the dice, such that for any **2** neighboring faces, their numbers differ by at least **5**. The six numbers are not necessarily distinct. What is the minimum possible value of the sum of those **6** numbers?

ডাচ-বাংলা ব্যাংক -প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২৩
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: প্রাইমারি (৩য়-৫ম শ্রেণি) **সময়: স্ন স্প্ল শ্ল**
Category: Primary (Class 3-5) **Time: 2 Hours**

স্প্ল প্রত্যয় একটি **50** তলা ভবনের **49** তম তলায় থাকে। ভবনটিতে দুইটি লিফট আছে। পায়েল প্রত্যয়ের সাথে দেখা করতে ভবনের নিচ তলা (লিফটের **0**) থেকে লিফটে উঠল। লিফটটি প্রতি দুই তলা যাওয়ার পরে খোলে এবং **20** সেকেন্ডের বিরতি দেয়। একই সাথে প্রত্যয় অফিসের কাজে অপর একটি লিফটে করে নামা শুরু করল। লিফটিতে যান্ত্রিক সমস্যার কারণে প্রতি তলায় **10** সেকেন্ডের জন্য খুলে। পায়েল ও প্রত্যয়ের যদি দেখা হয় তাহলে তা কততম তলায় এবং কখন হবে? লিফট দুইটির একটি তলা থেকে নিকটবর্তী তলায় যেতে সময় লাগে **30** সেকেন্ড। **[15]**

Pratyya lives on the **49**th floor of a **50**-storied building. The building has two lifts. Payel enters the lift to go up from the ground floor(**0**$^{\text{th}}$ floor) to meet Pratyya. The lift opens after every two floors and takes a pause for **20** seconds. At the same time Pratyya enters the other lift to go down for office work. Due to mechanical error the lift opens for **10** seconds at each floor. When and at which floor will they meet (if they do)? Both lifts take **30** seconds to go from a floor to the nearest floor.

স্ফ একটি ক্লাসরুমে কিছু ছেলে এবং কিছু মেয়ে আছে। ক্লাসরুমটির মানুষদের মধ্যে অর্ধেক শিক্ষার্থী একটি করে বিড়াল এবং এক-পঞ্চমাংশ একটি করে কুকুর ক্লাসরুমে নিয়ে এসেছে। একটি বাক্সে **2023** টি বিস্কুট ছিল। বাক্সটি থেকে প্রত্যেক ছেলে **18** টি করে, প্রত্যেক মেয়ে **25** টি করে, প্রত্যেক বিড়াল **4** টি করে এবং প্রত্যেক কুকুর **5** টি করে বিস্কুট নিল। এরপর বাক্সটিতে **777** টা বিস্কুট বাকি থাকল। ক্লাসরুমটিতে কয়জন ছেলে আছে? **[15]**

There are some boys and some girls in a classroom. Among the people in the classroom, half have bought a cat each and one-fifth have bought a dog each in the classroom. There were **2023** biscuits in a box. Each boy takes **18** biscuits, each girl takes **25** biscuits, each cat takes **4** biscuits and each dog takes **5** biscuits from the box. After that there are **777** biscuits left in the box. How many boys are there in the classroom?

স্ফ্র একটি পিকনিকে **7** জন বন্ধু মিলে গোল টেবিলে বসে শব্দের খেলা খেলছিল। পরে সেখানে আরও **3** জন বন্ধু এসে পৌছালো। সবাই তাদেরকে চেয়ার নিয়ে তাদের মাঝে বসতে বললো। তারা যেকোন স্থানে যেকোন সম্ভাব্য সংখ্যায় বসতে পারে। সেই **3** বন্ধু সর্বমোট কত উপায়ে গোলটেবিলে চেয়ার বসিয়ে সেখানে নিজেরা বসতে পারবে? **[15]**

In a picnic **7** friends were playing Word Game in a round table arrangement. After sometimes **3** more friends came. Everybody asked them to bring chairs and sit inside the arrangement. They can sit in any numbers in any place. In how many ways those **3** friends can put chair and sit on it in the round table arrangement?

স্ম. একটি তলে **5** টি বিন্দু আছে যেন কোনো **3** টি বিন্দুই সমরেখ নয়। এই **5** টি বিন্দুর মধ্যে তিনটি বিন্দু নিয়ে একটি ত্রিভুজ গঠন করলে বাকি দুইটি বিন্দু ত্রিভুজের মধ্যে অবস্থান করে। কিন্তু লেবেল দেখে বুঝার উপায় নেই কোন বিন্দুগুলো ত্রিভুজের শীর্ষ এবং কোনগুলো ভিতরে অবস্থান করে। তবে তুমি যেকোন তিনটি বিন্দু $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ এবং $\boldsymbol{C}$ নির্বাচন করে $\boldsymbol{ABC}$ এর ক্ষেত্রফল জিজ্ঞেস করতে পারো। এটাই এই তিনটি বিন্দু সম্পর্কে তথ্য পাবার একমাত্র উপায়। প্রমাণ করো যে, **7** টি প্রশ্ন করেই নির্ণয় করা সম্ভব যে কোন বিন্দুগুলো শীর্ষ এবং কোনগুলো ত্রিভুজের মধ্যে অবস্থান করে। **[20]**

We are given **5** points in the plane, no **3** of which are collinear. Three of those **5** points are vertices of a triangle and the other two lies inside that triangle. But the labels make it impossible to know which points are the vertices and which points lie inside. You can select any three points $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{C}$, and ask about the area of $\boldsymbol{ABC}$. This is the only way to get any information about the points. Prove that it's possible to determine which points are vertices and which points lie inside, using just **7** such questions.

ডাচ-বাংলা ব্যাংক -প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২৩
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: জুনিয়র (৬ষ্ঠ-৮ম শ্রেণি) **সময়:** স্পাস্প্ল শ্ল

Category: Junior (Class 6-8) **Time: 3 Hours**

শ্ছফছব্লা স্লাশ্লম্ন শ্লম্ন জ শ্ছপ্লশ্লা শ্ছপ্ল শ্লদ্রশ্লা ব্রফ্র শ্লম্ন লাশ্লশ্নস্টস্প্পা ক্ষগা শ্ছফছব্লা ল্লাস্তশ্ল ব্রুশ্ল্রুদ্রব্ধক্ষ্ণডস্পা লাশ্লা ল্লান্ত ষ্ট্রব্রুদ্র ব্রুট্টশ্লল্সস্টস্প্পা স্প লাম্ভ্র লাম্লক্গজ্ঞা ক্ষগাক্ষ জফ্ট্ম দ্রফ্টশাম্ভ্র স্পা ব্রুম স্পালস্টস্প্পা শ্ছফছব্লা শ্ছফলডশ্লদ্র ল্সট্ট্র র. লাম্ভপ্প ক্ষ্ম স্পলা শ্লম্ধপা স্পছদ্রশ্লা দ্র ল্সট্ট্র র. লাম্ভপ্প লা ক্ষম্ভ স্তস্পদ্রলা জফ্ট্ট লব্ধব্ধশ্লা ম্ন লাম্লদ্রলম্ধপা লব্ধশ্রদ্রক্গা ম্ন শ্লপ্রদ্র ক্ষদ্রস্পা ব্রূছস্পাশ্লদ্র ভ্রশ্লফন্দ ক্ষদ্রম্ভ ভ্রভ্র লা ব্রুম স্পালস্লশ্ল ভ্রস্ক্টপা

[Problems are sorted according to its difficulty. Full marks are written inside the bracket at the end of each problem. All numbers except the Question number are written in English. Answers have to be written on the main answer script. Back side of the answer script can be used for doing roughs. Writing name and registration number on each extra page is mandatory.]

স্থ. নিলয় তোমাকে একটি টাকা উৎপাদনকারী মেশিন দিলো। যদি তুমি এই মেশিনে কিছু টাকা জমা দাও তাহলে এই মেশিনও তোমাকে কিছু টাকা ফেরত দিবে। তুমি যদি এই মেশিনে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা জমা দাও এবং তার সাথে আরো **7** টাকা দাও তাহলে এই মেশিন ঐ নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা দ্বিগুণ করে ফেরত দিবে। তোমার কাছে যদি **2023** টাকা থাকে তাহলে এই মেশিন থেকে তুমি সর্বোচ্চ কতো টাকা ফেরত পেতে পারো? **[6]**

Niloy gives you a money-making machine. If you give this machine some taka, it will return you some taka. If you give the machine a certain amount of taka and **7** taka more, it will return you the double of that certain amount of taka. What amount of taka can you get the most from this machine if you have **2023** taka?

স্ন. $ABCD$ একটি উত্তল চতুর্ভুজ যেন $\angle ABD = \angle DBC$, $AD = CD$ এবং $AB \neq BC$ হয়। প্রমাণ কর যে $ABCD$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। **[8]**

(উত্তল চতুর্ভুজ হল এমন একটি চতুর্ভুজ যার সবগুলো অভ্যন্তরীণ কোণ $180°$ এর চেয়ে ছোট। একটি উত্তল চতুর্ভুজ বৃত্তস্থ হয় যদি এবং কেবল যদি এর দুটি বিপরীত কোণের সমষ্টি $180°$ হয়।)

$ABCD$ is a convex quadrilateral such that $\angle ABD = \angle DBC, AD = CD$ and $AB \neq BC$. Prove that $ABCD$ is cyclic.

(A convex quadrilateral is a quadrilateral having all of its interior angles measuring less than $180°$. A convex quadrilateral is cyclic if and only if the sum of its two opposite angles is $180°$.)

স্প্ $x^2 - 12y + 4 = 0$ এই সমীকরণের সকল পূর্ণসাংখ্যিক সমাধান নির্ণয় করো। **[10]**

Find all the integer solutions to the equation $x^2 - 12y + 4 = 0$

স্প্র ফুয়াদের কাছে **6**টি কলম আছে। এর মধ্যে **3**টি কলম একই রকমের এবং বাকি **3**টি কলম ভিন্ন ভিন্ন রকমের। ফুয়াদ কতভাবে এই **6**টি কলম **3** জনের মাঝে ভাগ করে দিতে পারবে যেন, প্রত্যেকে কমপক্ষে একটি করে কলম পায়? **[10]**

Fuad has **6** pens. Among these, **3** pens are identical and other **3** pens are distinctly different. How many ways Fuad can distribute these **6** pens among **3** people so that, everyone gets at least one pen?

স্প্ল তিহামের কাছে **1** থেকে **2023** পর্যন্ত **2023** টি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা আছে। সে প্রতিবারে দুইটি ভিন্ন সংখ্যার একটি জোড়া নেয় এবং জোড়াটি একটি ডায়েরিতে লিখে রাখে। সে এভাবে সম্ভাব্য সকল জোড়া ডায়েরিতে লিখে রাখে। প্রমাণ করো যে, তিহামের কাছে এমন অন্তত **867** টি ভিন্ন জোড়া আছে যেন, জোড়ার সংখ্যা দুইটির যোগফল **7** যারা দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হয়। [(a, b) এবং (b, a) একই জোড়া হিসেবে গণ্য হবে] **[10]**

Tiham has **2023** positive integers from **1** to **2023**. Every time he takes a pair of two different integers and writes the pair in a diary. He writes all such possible pairs in the diary. Prove that, he has at least **867** such different pairs so that, sum of the integers in the pair is completely divisible by **7**. [(a, b) and (b, a) are considered as same pair]

স্ফ **[10]**

$\boldsymbol{A, B, C}$ বিন্দুগুলো ঠিক এই ক্রমে একটি রেখার উপর অবস্থান করছে। $\boldsymbol{AB}$ হল $\boldsymbol{\omega_1}$অর্ধবৃত্তের ব্যাস এবং $\boldsymbol{AC}$ হল $\boldsymbol{\omega_2}$ অর্ধবৃত্তের ব্যাস । ধরে নাও, $\boldsymbol{\omega_1}$ এবং $\boldsymbol{\omega_2}$ উভয়ই $\boldsymbol{AC}$ এর একই পাশে অবস্থিত। $\boldsymbol{D}$ হল $\boldsymbol{\omega_2}$ এর উপর এমন একটি বিন্দু যেন, $\boldsymbol{BD \perp AC}$ । $\boldsymbol{BD}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এবং $\boldsymbol{B}$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $\boldsymbol{\omega_1}$ কে $\boldsymbol{E}$ বিন্দুতে ছেদ করে। $\boldsymbol{AC}$ এর উপর $\boldsymbol{F}$ বিন্দুটি এমনভাবে অবস্থিত যেন $\boldsymbol{EF \perp AC}$ । প্রমাণ করো যে, $\boldsymbol{BC = BF}$ ।

Let the points $\boldsymbol{A, B, C}$ lie on a line in this order. $\boldsymbol{AB}$ is the diameter of semicircle $\boldsymbol{\omega_1}$, $\boldsymbol{AC}$ is the diameter of semicircle $\boldsymbol{\omega_2}$. Assume both $\boldsymbol{\omega_1}$ and $\boldsymbol{\omega_2}$ are on the same side of $\boldsymbol{AC}$. $\boldsymbol{D}$ is a point on $\boldsymbol{\omega_2}$ such that $\boldsymbol{BD \perp AC}$. A circle centered at $\boldsymbol{B}$ with radius $\boldsymbol{BD}$ intersects $\boldsymbol{\omega_1}$ at $\boldsymbol{E}$. $\boldsymbol{F}$ is on $\boldsymbol{AC}$ such that $\boldsymbol{EF \perp AC}$. Prove that $\boldsymbol{BC = BF}$.

স্ফ একটি ফায়ার সার্ভিস ট্রেইনিং এ **20** ফুট উচু একটি বিল্ডিং এ ওঠার জন্য দুইটি সমান উচ্চতার মই আছে যার একটিতে **34** টি ধাপ এবং আরেকটিতে **49** টি ধাপ বিদ্যমান। দুইজন ফায়ার সার্ভিস কর্মী দুইটি মই ব্যবহার করে সেই বিল্ডিং এ ওঠা শুরু করলো। এখন মাঝপথে তাদেরকে একটি ফায়ার পাইপ হাতবদল করতে হবে। তারা চায় তাদের মাঝে সম্ভাব্য সর্বনিম্ন দুরত্বে ফায়ার পাইপ হাতবদল করতে। তারা প্রত্যেকে তাদের মই এর কততম ধাপে থাকলে তা করা সম্ভব? **[10]**

In fire-service training, there are two ladders of equal height to climb a **20**-foot-high building, one of which has **34** rungs and the other has **49** rungs. Two fire service personnel started climbing the building using two ladders. During climbing, they have to shift a fire pipe from one to another. They want the fire pipe to change hands at the lowest distance possible between them. On which rung they should be on their respective ladder to do this?

স্ম. সাদ এমন একটি চতুর্ভূজ $\boldsymbol{ABCD}$ আঁকলো যেটায় $\boldsymbol{AB = BC = CD}$ । তারপর সে ঐ ছবিতে আরো তিনটি বিন্দু $\boldsymbol{M, N}$ এবং $\boldsymbol{P}$ অংকন করলো যারা যথাক্রমে $\boldsymbol{AB, BC}$ এবং $\boldsymbol{CD}$ বাহুর মধ্যবিন্দু। কিন্তু রাফি এসে মধ্যবিন্দু তিনটি বাদে ঐ ছবির বাকি সবকিছু মুছে দিলো। $\boldsymbol{M, N}$ এবং $\boldsymbol{P}$ বিন্দু তিনটি ব্যবহার করে চতুর্ভূজটি পুনর্গঠনের একটি উপায় বের করো। **[12]**

Saad drew a quadrilateral $\boldsymbol{ABCD}$ such that $\boldsymbol{AB = BC = CD}$. He also drew the midpoints $\boldsymbol{M, N}$ and $\boldsymbol{P}$ of the sides $\boldsymbol{AB, BC}$ and $\boldsymbol{CD}$ respectively. But then Rafi came and erased everything but the midpoints. Figure out a way to reconstruct the quadrilateral using the points $\boldsymbol{M, N}$ and $\boldsymbol{P}$.

স্ল. একটি দেশে **1** ডলার হল **100** সেন্ট সমমূল্যের। এই দেশে কয়েনগুলো **1, 2, 5, 10, 20, 50** এবং **100** সেন্ট শ্রেণিতে বিভক্ত। কেউ যদি ঠিক $\boldsymbol{B}$ সংখ্যক কয়েন ব্যবহার করে $\boldsymbol{A}$ সমমূল্যের সেন্ট বানাতে পারে তাহলে প্রমান করো যে, ঠিক $\boldsymbol{A}$ সংখ্যক কয়েন ব্যবহার করে $\boldsymbol{B}$ সমমূল্যের ডলার বানানো সম্ভব। **[12]**

In a certain country, a dollar is **100** cents and coins have denominations **1, 2, 5, 10, 20, 50** and **100** cents. Suppose that one can make $\boldsymbol{A}$ cents using exactly $\boldsymbol{B}$ coins. Prove that it is possible to make $\boldsymbol{B}$ dollars using exactly $\boldsymbol{A}$ coins.

স্তৃ. প্রমাণ করো যে, **2023** টি ভিন্ন ভিন্ন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার এমন একটি অনুক্রম আছে যেন অনুক্রমটির যেকোনো দুইটি ক্রমিক পদের বর্গের যোগফল নিজেই একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা। **[12]**

Prove that, there is a sequence of **2023** distinct positive integers such the sum of the squares of any two consecutive terms is a perfect square itself.

ডাচ-বাংলা ব্যাংক -প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২৩
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: সেকেন্ডারি (৯ম-১০ম শ্রেণি) | **সময়: ৩ [illegible]**

Category: Secondary (Class 9-10) | **Time: 3 Hours 30 Minutes**

[illegible]

[Problems are sorted according to its difficulty. Full marks are written inside the bracket at the end of each problem. All numbers except the Question number are written in English. Answers have to be written on the main answer script. Back side of the answer script can be used for doing roughs. Writing name and registration number on each extra page is mandatory.]

হ্. নিচের সমীকরণটির সকল সম্ভাব্য অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যিক সমাধান (x, y) নির্ণয় করো: **[8]**

$$x! + 2^y = (x+1)!$$

দ্রষ্টব্য: $x! = x \cdot (x-1)!$ এবং $0! = 1$। উদাহরণস্বরূপ, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$।

Find all possible non-negative integer solution (x, y) of the following equation-

$$x! + 2^y = (x+1)!$$

Note: $x! = x \cdot (x-1)!$ and $0! = 1$. For example, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

ম্ন. A, B, C বিন্দুগুলো ঠিক এই ক্রমে একটি রেখার উপর অবস্থান করছে। AB হল ω_1অর্ধবৃত্তের ব্যাস এবং AC হল ω_2 অর্ধবৃত্তের ব্যাস । ধরে নাও, ω_1 এবং ω_2 উভয়ই AC এর একই পাশে অবস্থিত। D হল ω_2 এর উপর এমন একটি বিন্দু যেন, $BD \perp AC$ । BD ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এবং B কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত ω_1 কে E বিন্দুতে ছেদ করে। AC এর উপর F বিন্দুটি এমনভাবে অবস্থিত যেন $EF \perp AC$ । প্রমাণ করো যে, $BC = BF$ । **[8]**

Let the points A, B, C lie on a line in this order. AB is the diameter of semicircle ω_1, AC is the diameter of semicircle ω_2. Assume both ω_1 and ω_2 are on the same side of AC. D is a point on ω_2 such that $BD \perp AC$. A circle centered at B with radius BD intersects ω_1 at E. F is on AC such that $EF \perp AC$. Prove that $BC = BF$.

স্প্ নিচের সমীকরণটির ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যিক সমাধান নির্ণয় করো: **[10]**

$$(x+2y)^2 + 2x + 5y + 9 = (y+z)^2$$

Solve the equation for the positive integers:

$$(x+2y)^2 + 2x + 5y + 9 = (y+z)^2$$

স্প্র কতগুলো বালতিতে **2023** টি বল রাখা হলো যেন কোনো বালতিতে **99** টির বেশি বল না থাকে। আমরা যতবার ইচ্ছা ততবার বালতি থেকে কতগুলো বল তুলে নিতে পারি অথবা পুরো একটি বালতি সরিয়ে ফেলতে পারি। প্রমাণ করো যে, আমরা সবসময়েই বল অথবা বালতিগুলো এমনভাবে সরিয়ে ফেলতে পারবো যেন বাকি বালতিগুলোতে সর্বদাই সমান সংখ্যক বল থাকে এবং বালতিগুলোতে সব মিলিয়ে অন্তত **100** টি বল বাকি থাকে। **[10]**

2023 balls are divided into several buckets such that no bucket contains more than **99** balls. We can remove balls from any bucket or remove an entire bucket, as many times as we want. Prove that we can remove them in such a way that each of the remaining buckets will have an equal number of balls and the total number of remaining balls will be at least **100**.

স্প্ল m, n এবং p হল এমন বাস্তব সংখ্যা যেন $(m+n+p)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}) = 1$ হয়। **[10]**

$\frac{1}{(m+n+p)^{2023}} - \frac{1}{m^{2023}} - \frac{1}{n^{2023}} - \frac{1}{p^{2023}}$ এর সকল সম্ভাব্য মান নির্ণয় করো।

Let m, n and p are real numbers such that $(m+n+p)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}) = 1$.

Find all possible values of $\frac{1}{(m+n+p)^{2023}} - \frac{1}{m^{2023}} - \frac{1}{n^{2023}} - \frac{1}{p^{2023}}$.

ডাচ-বাংলা ব্যাংক -প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২৩
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: সেকেন্ডারি (৯ম-১০ম শ্রেণি) **সময়: ৩ স্পুষ্ম শ্লস্প্ত্র ষ্কযঙ্কড্রস্ল**

Category: Secondary (Class 9-10) **Time: 3 Hours 30 Minutes**

স্ফ ΔABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ এবং ω তার পরিবৃত্ত। N হল AC চাপের অবস্থিত একটি বিন্দু, যেই চাপের উপর B বিন্দুটি অবস্থিত নয় এবং AB রেখার উপর S একটি বিন্দু। N বিন্দুতে ω কে স্পর্শকারী রেখা BC কে T বিন্দুতে ছেদ করে, NS রেখা ω কে K বিন্দুতে ছেদ করে। ধর $\angle NTC = \angle KSB$. প্রমাণ কর যে $CK \parallel AN \parallel TS$. **[10]**

Let ΔABC be an acute triangle and ω be its circumcircle. Let N be a point on arc AC not containing B and S be a point on line AB. The line tangent to ω at N intersects BC at T, NS intersects ω at K. Assume that $\angle NTC = \angle KSB$. Prove that $CK \parallel AN \parallel TS$.

স্ফ্র প্রমাণ করো যে, যেকোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা নিম্নোক্ত আকারে প্রকাশ করা যায়, **[10]**

$$3^{m_1}.2^{n_1} + 3^{m_2}.2^{n_2} + \ldots + 3^{m_k}.2^{n_k} ,$$

যেখানে, $m_1 > m_2 > \ldots > m_k \geq 0$ এবং $0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ প্রত্যেকেই পূর্ণসংখ্যা।

Prove that every positive integer can be represented in the form

$$3^{m_1}.2^{n_1} + 3^{m_2}.2^{n_2} + \ldots + 3^{m_k}.2^{n_k} ,$$

where $m_1 > m_2 > \ldots > m_k \geq 0$ and $0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ are integers.

স্ম. সংখ্যারেখার উপর n টি ব্যবধি দেয়া আছে: $[l_1, r_1], [l_2, r_2], [l_3, r_3], \cdots, [l_n, r_n]$। ব্যবধিগুলোকে আমরা দুইটি সেট এ ভাগ করতে পারি যেন একই সেট এর কোনও দুইটি ব্যবধির মাঝে সাধারণ কোন অংশ না থাকে। প্রমাণ কর যে সর্বোচ্চ $n - 1$ সংখ্যক জোড়া ব্যবধি আছে যাদের মাঝে সাধারণ অংশ বিদ্যমান। **[10]**

We are given n intervals $[[l_1, r_1], [l_2, r_2], [l_3, r_3], \cdots, [l_n, r_n]$ in the number line. We can divide the intervals into two sets such that no two intervals in the same set have overlaps. Prove that there are at most $n - 1$ pairs of overlapping intervals.

স্ল. $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ হলো বৃত্ত ω-তে অন্তর্লিখিত একটি সুষম $2n$-ভূজ। P, ω বৃত্তের উপর যেকোন একটি বিন্দু। ধরো, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ হলো যথাক্রমে $PA_1A_2, PA_3A_4, \ldots, PA_{2n-1}A_{2n}$ ত্রিভুজগুলোর লম্ববিন্দু। প্রমাণ করো যে $H_1H_2 \ldots . H_n$ একটু সুষম n-ভূজ। **[12]**

Let $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ be a regular $2n$**-gon** inscribed in circle ω. Let P be any point on the circle ω. Let $H_1, H_2, \ldots, H_n$ be the orthocenters of triangles $PA_1A_2, PA_3A_4, \ldots, PA_{2n-1}A_{2n}$ respectively. Prove that $H_1H_2 \ldots . H_n$ is a regular n**-gon**.

স্থস্ত্র. জয় একটি $n\, x\, n$ আকারের বর্গাকৃতির বোর্ড আছে। প্রতি ধাপে সে বোর্ডের একটি ঘর রং করে। সে একটি ঘর একবারের বেশি রং করতে পারেনা। এছাড়াও, সে রঙ করার সময় পয়েন্ট গোনে। প্রথমে তার 0 পয়েন্ট থাকে। প্রতি ধাপে সে একটি ঘর c কে রং করে। এরপর সে সবচেয়ে বড় সেট S নেয়, যাতে c ঘরটি সেই সেটে থাকে, আর সবচেয়ে বড় পরপর রং করা সেট যাতে প্রতিটি ঘর c যেই সারিতে আছে সেই সারি অথবা c যেই কলামে আছে সেই কলামে থাকে। এই সেটটি সবচেয়ে বড় সেট যেটি '+' আকৃতির, যাতে c ঘরটি এর কেন্দ্রে থাকে। তারপর, সে S সেটের উপাদান সংখ্যা কে পয়েন্ট হিসেবে পায়। পুরো $n\, x\, n$ বোর্ডটি রং করার পর, সবচেয়ে বেশি কত পয়েন্ট পাওয়া সম্ভব? **[12]**

Joy has a square board of size $n \times n$. At every step, she colors a cell of the board. She cannot colour any cell more than once. She also counts points while coluoring the cells. At first, she has 0 points. Every step, after colouring a cell c, she takes the largest set S of cells such that the set contains c, and also contains the largest possible consecutively colored cells that are either in the same row or in the same column as c. The resulting set is the largest possible '+' sign where all cells are coloured with c in the centre. Then, she gets the size of the set S as points. After coloring the whole $n\, x\, n$ board, what is the maximum possible amount of points she can get?

ডাচ-বাংলা ব্যাংক -প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২৩
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: হায়ার সেকেন্ডারি (১১শ-১২শ শ্রেণি) **সময়: ৩ [illegible]**

Category: Higher Secondary (Class 11-12) **Time: 3 Hours 30 Minutes**

[illegible]

[Problems are sorted according to its difficulty. Full marks are written inside the bracket at the end of each problem. All numbers except the Question number are written in English. Answers have to be written on the main answer script. Back side of the answer script can be used for doing roughs. Writing name and registration number on each extra page is mandatory.]

স্থ. নিচের সমীকরণটির সকল সম্ভাব্য অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যিক সমাধান (x, y) নির্ণয় করো: [7]

$$x! + 2^y = z!$$

দ্রষ্টব্য: $\boldsymbol{x}! = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{x}-\mathbf{1})!$ এবং $\mathbf{0}! = \mathbf{1}$। উদাহরণস্বরুপ, $\mathbf{5}! = \mathbf{5} \times \mathbf{4} \times \mathbf{3} \times \mathbf{2} \times \mathbf{1} = \mathbf{120}$।

Find all possible non-negative integer solution (x, y) of the following equation-

$$x! + 2^y = z!$$

Note: $\boldsymbol{x}! = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{x}-\mathbf{1})!$ and $\mathbf{0}! = \mathbf{1}$. For example, $\mathbf{5}! = \mathbf{5} \times \mathbf{4} \times \mathbf{3} \times \mathbf{2} \times \mathbf{1} = \mathbf{120}$.

স্ন. ধরো, $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}\}$ হল $\boldsymbol{n}$ সংখ্যক বাস্তব সংখ্যার একটি সেট যার সদস্যগুলোর সমষ্টি $\boldsymbol{S}$। এটি জানা রয়েছে যে, সেটের প্রতিটি উপাদানই $\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}$ এর চেয়ে ছোট। প্রমাণ করো যে, সেটটির যেকোন তিনটি উপাদান $\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j}$ এবং $\boldsymbol{a_k}$ এর জন্য $\boldsymbol{a_i} + \boldsymbol{a_j} > \boldsymbol{a_k}$। [9]

Let $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}\}$ be a set of $\boldsymbol{n}$ real numbers whose sum equals $\boldsymbol{S}$. It is known that each number in the set is less than $\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}$. Prove that for any three numbers $\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j}$ and $\boldsymbol{a_k}$ in the set, $\boldsymbol{a_i} + \boldsymbol{a_j} > \boldsymbol{a_k}$.

স্পা যেকোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $\boldsymbol{n}$ এর জন্য $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})$ হলো ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, যেটি দ্বারা $\boldsymbol{n}$ বিভাজ্য নয়। যেমন: $\boldsymbol{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{f}(\mathbf{6}) = \mathbf{4}$। প্রমাণ করো যে, যেকোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, $\boldsymbol{n}$ এর জন্য, হয় $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}))$ অথবা $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})))$ অবশ্যই $\mathbf{2}$ এর সমান হবে। [9]

For any positive integer $\boldsymbol{n}$, define $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})$ to be the smallest positive integer that does not divide $\boldsymbol{n}$. For example, $\boldsymbol{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{f}(\mathbf{6}) = \mathbf{4}$. Prove that for any positive integer $\boldsymbol{n}$, either $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}))$ or $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})))$ must be equal to $\mathbf{2}$.

স্প্র $\boldsymbol{ABCD}$ হলো বৃত্ত $\boldsymbol{\omega}$-তে অন্তর্লিখিত একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম, যেন $\boldsymbol{AB}||\boldsymbol{CD}$। ধরো, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{\omega}$ বৃত্তের উপর একটি বিন্দু। $\boldsymbol{H_1}$ এবং $\boldsymbol{H_2}$ যথাক্রমে $\boldsymbol{PAD}$ এবং $\boldsymbol{PBC}$ ত্রিভূজের লম্ববিন্দু হলে, প্রমাণ করো যে, যখন $\boldsymbol{P}$ এর অবস্থান পরিবর্তনশীল, $\boldsymbol{H_1H_2}$ এর দৈর্ঘ্য একটি ধ্রুবক। [9]

Let $\boldsymbol{ABCD}$ be an isosceles trapezium inscribed in circle $\boldsymbol{\omega}$, such that $\boldsymbol{AB}||\boldsymbol{CD}$. Let $\boldsymbol{P}$ be a point on the circle $\boldsymbol{\omega}$. Let $\boldsymbol{H_1}$ and $\boldsymbol{H_2}$ be the orthocenters of triangles $\boldsymbol{PAD}$ and $\boldsymbol{PBC}$ respectively. Prove that the length of $\boldsymbol{H_1H_2}$ remains constant, when $\boldsymbol{P}$ varies on the circle.

স্প্ল $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ এমন একটি যোগজীকরণযোগ্য ফাংশন যেন $\boldsymbol{af}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{bf}(\boldsymbol{b}) = \mathbf{0}$ হয়, যখন $\boldsymbol{ab} = \mathbf{1}$. [10]

নিচের অন্তরীকরণের মান বের কর:

$$\int_0^\infty \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$$

Consider an integrable function $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ such that $\boldsymbol{af}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{bf}(\boldsymbol{b}) = \mathbf{0}$ when $\boldsymbol{ab} = \mathbf{1}$.

Find the value of the following integration:

$$\int_0^\infty \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$$

ডাচ-বাংলা ব্যাংক -প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২৩

জাতীয় গণিত উৎসব

আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: হায়ার সেকেন্ডারি (১১শ-১২শ শ্রেণি) | **সময়: ৩ স্পুক্স শ্লস্পস্ত্র ক্বযক্ষড্রম্ল**

Category: Higher Secondary (Class 11-12) | **Time: 3 Hours 30 Minutes**

স্ফ সংখ্যারেখার উপর n টি ব্যবধি দেয়া আছে: $[l_1, r_1], [l_2, r_2], [l_3, r_3], \cdots, [l_n, r_n]$। ব্যবধিগুলোকে আমরা দুইটি সেট এ ভাগ করতে পারি যেন একই সেট এর কোনও দুইটি ব্যবধির মাঝে সাধারণ কোন অংশ না থাকে। প্রমাণ কর যে সর্বোচ্চ $n-1$ সংখ্যক জোড়া ব্যবধি আছে যাদের মাঝে সাধারণ অংশ বিদ্যমান। **[10]**

We are given n intervals $[[l_1, r_1], [l_2, r_2], [l_3, r_3], \cdots, [l_n, r_n]$ in the number line. We can divide the intervals into two sets such that no two intervals in the same set have overlaps. Prove that there are at most $n-1$ pairs of overlapping intervals.

স্ফ্র ধরো, $\triangle ABC$ একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ এবং ω হল এর পরিবৃত্ত. A থেকে BC এর উপর লম্ব আকলে তা BC কে D বিন্দুতে এবং ω কে K বিন্দুতে ছেদ করে. A, D বিন্দুগামী এবং BC কে স্পর্শ করে এমন একটি বৃত্ত E বিন্দুতে ω কে ছেদ করে। AE রেখা BC কে T বিন্দুতে ছেদ করে। TK রেখা ω কে S বিন্দুতে ছেদ করে। মনে করো, SD রেখা ω কে X বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে, X হল BC এর লম্বসমদ্বিখন্ডকের সাপেক্ষে A এর প্রতিবিম্ব। **[10]**

Let $\triangle ABC$ be an acute triangle and ω be its circumcircle. Perpendicular from A to BC intersects BC at D and ω at K. Circle through A, D and tangent to BC at D intersects ω at E. AE intersects BC at T. TK intersects ω at S. Assume, SD intersects ω at X. Prove that X is the reflection of A with respect to the perpendicular bisector of BC.

স্ম. কিবরিয়া একটি $n\,x\,n$ আকারের বর্গাকৃতির বোর্ড আছে। প্রতি ধাপে সে বোর্ডের একটি ঘর রং করে। সে একটি ঘর একবারের বেশি রং করতে পারেনা। এছাড়াও, সে রঙ করার সময় পয়েন্ট গোনে। প্রথমে তার 0 পয়েন্ট থাকে। প্রতি ধাপে সে একটি ঘর c কে রং করে। এরপর সে সবচেয়ে বড় সেট S নেয়, যাতে c ঘরটি সেই সেটে থাকে, আর সবচেয়ে বড় পরপর রং করা সেট যাতে প্রতিটি ঘর c যেই সারিতে আছে সেই সারি অথবা c যেই কলামে আছে সেই কলামে থাকে। এই সেটটি সবচেয়ে বড় সেট যেটি '+' আকৃতির, যাতে c ঘরটি এর কেন্দ্রে থাকে। তারপর, সে S সেটের উপাদান সংখ্যা কে পয়েন্ট হিসেবে পায়। পুরো $n\,x\,n$ বোর্ডটি রং করার পর, সবচেয়ে বেশি কত পয়েন্ট পাওয়া সম্ভব? **[12]**

Kibria has a square board of size $n \times n$. At every step, she colors a cell of the board. She cannot colour any cell more than once. She also counts points while colouring the cells. At first, she has 0 points. Every step, after colouring a cell c, she takes the largest set S of cells such that the set contains c, and also contains the largest possible consecutively colored cells that are either in the same row or in the same column as c. The resulting set is the largest possible '+' sign where all cells are coloured with c in the centre. Then, she gets the size of the set S as points. After coloring the whole $n\,x\,n$ board, what is the maximum possible amount of points she can get?

স্ল. $\triangle ABC$ একটি সুক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। D, BC এর উপর এমন একটি বিন্দু যেন AD, $\angle BAC$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। l রেখাটি যথাক্রমে K এবং L বিন্দুতে ত্রিভুজ ADB এবং ADC এর পরিবৃত্তের স্পর্শক। ধরো M, N এবং P যথাক্রমে BD, DC এবং KL এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করো যে l, $\triangle MNP$ এর পরিবৃত্তের স্পর্শক। **[12]**

Let $\triangle ABC$ be an acute angled triangle. D is a point on side BC such that AD bisects angle $\angle BAC$. A line l is tangent to the circumcircles of triangles ADB and ADC at points K and L, respectively. Let M, N and P be the midpoints of BD, DC and KL. Prove that l is tangent to the circumcircle of $\triangle MNP$.

স্থস্ত্র. **2023** ঘাতের বাস্তব সহগবিশিষ্ট সকল বহুপদী: $P(x) = x^{2023} + a_1x^{2022} + a_2x^{2021} + \cdots + a_{2022}x + a_{2023}$ যেখানে $P(0) + P(1) = 0$, এবং বহুপদীটির 2023 টি বাস্তব মূল $r_1, r_2, \cdots, r_{2023}$ [সবগুলো ভিন্ন নাও হতে পারে] থাকে যেন $0 \le r_1, r_2, \cdots, r_{2023} \le 1$। $r_1 r_2 \cdots r_{2023}$ এর সর্বোচ্চ মান কত? **[12]**

Let all possible 2023-degree real polynomials: $P(x) = x^{2023} + a_1x^{2022} + a_2x^{2021} + \cdots + a_{2022}x + a_{2023}$. Where $P(0) + P(1) = 0$, and the polynomial has 2023 real roots $r_1, r_2, \cdots, r_{2023}$ [not necessarily distinct] so that $0 \le r_1, r_2, \cdots, r_{2023} \le 1$. What is the maximum value of $r_1 r_2 \cdots r_{2023}$?